Corrigé type de l'examen de l'électromagnétisme (2023)

Exercice 01 :

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ 1

En coordonnées sphériques Laplacien s'écrit :

$$\Delta U = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}U) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{rsin(\theta)}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\varphi\right)$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2 sin(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 sin(\theta)\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(rsin(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r\frac{1}{rsin(\theta)}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\right]$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin(\theta)\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2(\theta)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)$$ 0.5

On a une symétrie sphérique, alors U n'est dépend que de r :$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$

0.5

Alors , l'équation de Poisson s'écrit :

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{-4\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = 4$$ 1

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) = 4r^2 \Rightarrow \left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{4}{3}r^3 + A$$ 0.5

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{4}{3}r + \frac{A}{r^2} \Rightarrow U = \frac{2}{3}r^2 - \frac{A}{r} + B$$ 0.5

Les constantes A et B sont déterminées à partir aux conditions aux limites :

Pour $r = 10^{-3}m, U = 0V \Rightarrow\ 0 = \frac{2}{3}10^{-6} - \frac{A}{10^{-3}} + B \Rightarrow 10^3 A - B = \frac{2}{3}10^{-6} \approx 0\ \cdots(1)$

Pour $r = 2\times10^{-2}m, U = 150V \Rightarrow\ 150 = \frac{2}{3}4\times10^{-4} - \frac{A}{2\times10^{-2}} + B$

$$\Rightarrow -50A + B = 150 - \frac{8}{3}\times10^{-4} \approx 150\ \cdots(2)$$

En résolvant le système d'équation (1),(2) on trouve:$A = 0.158\ V.m$ et $B = 157.98V$

$$U = \frac{2}{3}r^2 - \frac{0.158}{r} + 157.98$$ 1

Le champ E :$\vec{E} = -\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r = \left(\frac{4}{3}r + \frac{0.158}{r^2}\right)\vec{e}_r$ 1

Exercice 2: : (6.5 points)

1. les équations de Maxwell dans le vide
   dans le vide la densité volumique des charges $\rho = 0$ et la densité de courant de conduction $\vec{J}_c = \vec{0}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$
0.5

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
0.5

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
0.5

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}_D = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$
0.5

2. le champ électrique $\vec{E}$ en fonction de E_0.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V_1 - \frac{\partial\vec{A}_1}{\partial t} = -\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V_1}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V_1}{\partial z}\vec{e}_z\right) - \frac{\partial\vec{A}_1}{\partial t}$$

$$\vec{E} = \left(E_0 y\vec{e}_x + E_0 x\vec{e}_y\right) - \left(E_0 y\vec{e}_x + E_0(x-1)\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{E} = E_0\vec{e}_y$$
1

le champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de E_0

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_0 yt & E_0\left((x-1)t + \dfrac{x}{c}\right) & 0 \end{vmatrix} = \left[E_0\left(t + \frac{1}{c}\right) - E_0 t\right]\vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\vec{e}_z$$
1

3. le vecteur densité de courant de déplacement en fonction de E_0.

$$\vec{J}_D = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$
1

4. En utilisant le champ de scalaire. $\varphi = E_0 zt$, calculer les potentiels scalaire et vecteur $(V_2, \vec{A}_2)$ qui définissent la jauges $\mathcal{J}_2$.

$$V_2 = V_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -E_0 xy - \frac{\partial(E_0 zt)}{\partial t}$$

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \vec{\nabla}\varphi = E_0 yt\vec{e}_x + E_0\left((x-1)t + \frac{x}{c}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

$$V_2 = -E_0 xy - E_0 z$$
1

$$\vec{A}_2 = E_0 yt\vec{e}_x + E_0\left((x-1)t + \frac{x}{c}\right)\vec{e}_y + E_0 t\vec{e}_z$$
1

Exercice 3: : (8 points)

1. la valeur numérique de la constante k.

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{3\times10^{15}}{3\times10^{8}} = 10^{7}\,\mathrm{m}^{-1}$$
0.75

2. la longueur d'onde λ

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 6.28\times10^{-7}\,m$$
0.75

3.

- la direction de polarisation suivant l'axe $\overrightarrow{Ox}$ 0.25
- la direction de propagation es suivant l'axe $\overrightarrow{Oy}$ 0.25
- l'onde est transversale. 0.25
- on peut dire que cette onde est plane parce que elle a un seul sens de propagation suivant l'axe $\overrightarrow{Oy}$. 0.25

L'amplitude est : E_0 0.25

4. les composantes du champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de E_x..

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad 0.5$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y}\vec{e}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-kE_0 \, sin(\omega t - ky)\vec{e}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = kE_0 \, sin(\omega t - ky)\vec{e}_z$$

$$\vec{B} = -\frac{k}{\omega}E_0 \, cos(\omega t - ky)\vec{e}_z$$

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \, cos(\omega t - ky)\vec{e}_z = -\frac{1}{c}E_x\vec{e}_z = \frac{1}{c}E_x\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad 1$$

5. les composantes du vecteur de Poynting $\vec{R}$ en fonction de E_x.

$$\vec{R} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c}E_x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\mu_0 c}E_x^2\vec{e}_y = -\frac{1}{\mu_0 c}E_x^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 1$$

6. la valeur de E_0.

La puissance instantanée rayonnée par cette onde à travers une surface $S = 4 \text{ mm}^2$ est:

$$P = \iint_{(s)} \vec{R} \cdot \vec{ds} = \|\vec{R}\|S = \frac{S}{\mu_0 c}E_x^2 = \frac{S}{\mu_0 c}E_0^2 cos^2(\omega t - ky) \qquad 0.5$$

La surface S est orthogonale à la direction de propagation de l'onde $\Rightarrow \vec{R} \,//\, \vec{ds}$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{S}{\mu_0 c}E_0^2\left[\frac{1}{T}\int_0^T cos^2(\omega t - ky)dt\right] = \frac{S}{2\mu_0 c}E_0^2 \qquad 0.5$$

$$\langle P \rangle = \frac{S}{2\mu_0 c}E_0^2 = 10 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{\langle P \rangle 2\mu_0 c}{S}}$$

$$= \sqrt{\frac{10 \times 2 \times 4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8}{4 \times 10^{-6}}} = 4.34 \times 10^4 V/m \qquad 1$$